Derivazione *ruspante* della forma per il calcolo della distanza punto-retta

Supponiamo di avere, nel piano cartesiano, una retta r, di equazione *esplicita*[1] $y = mx + q$ e un punto, *esterno ad essa*, $\mathsf{P} : (x_0; y_0)$.

La distanza, D, di P da r è data dalla lunghezza del segmento $\overline{PQ}$, dove Q è l'intersezione con r della retta $\mathsf{s} \perp \mathsf{r}$ passante per P.

Tenendo conto della forma dell'equazione della retta passante per un punto, e della relazione tra i coefficienti angolari di rette perpendicolari, ricaviamo immediatamente i parametri dell'equazione della retta $\mathsf{s} : y = m'x + q'$, come segue:

$$\mathsf{s} \perp \mathsf{r} \Longrightarrow \quad m' = -\frac{1}{m} \qquad \text{e} \qquad \mathsf{P} \in \mathsf{s} \Longrightarrow \quad \mathsf{s}: \; y - y_0 = m'(x - x_0) \; . \tag{1}$$

Quindi

$$\mathsf{s}: \; y = -\frac{1}{m}x + y_0 + \frac{1}{m}x_0 \; . \tag{2}$$

Le coordinate del punto $\mathsf{Q} : (x_Q; y_Q)$, si ottengono ponendo a sistema le equazioni delle rette r ed s:

$$\begin{cases} y = mx + q \\ y = -\dfrac{1}{m}x + y_0 + \dfrac{1}{m}x_0 \; , \end{cases} \tag{3}$$

dalle quali segue

$$x_Q - x_0 = \frac{m}{m^2+1}(y_0 - mx_0 - q) \qquad \text{e} \quad y_Q - y_0 = -\frac{1}{m}(x_Q - x_0) \; . \tag{4}$$

Applicando il teorema di Pitagora, si trova quindi

$$D^2 \equiv |\overline{PQ}|^2 = \frac{(y_0 - mx_0 - q)^2}{1 + m^2} \; ; \tag{5}$$

vale a dire

$$D \equiv |\overline{PQ}| = \frac{|y_0 - mx_0 - q|}{\sqrt{1 + m^2}} \; ; \tag{6}$$

equivalente a quella riportata sul libro di testo,

$$D = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \; , \tag{7}$$

che è però espressa in termini dei coefficienti dell'equazione della retta r scritta in forma implicita:

$$ax + by + c = 0 \; ,$$

con $a = -mb$ e $c = -qb$.

Osserviamo infine che l'equazione (6) fornisce l'espressione corretta della distanza punto-retta anche nel caso di una retta orizzontale: per $m = 0$ si ottiene infatti:

$$D = \frac{|y_0 - mx_0 - q|}{\sqrt{1 + m^2}} \longrightarrow |y_0 - q| \; . \tag{8}$$

[1] Ciò significa che la presente discussione vale per rette non verticali. È ovvio che nel caso di una retta verticale, di equazione quindi $x = k$, la distanza di P sarà semplicemente data dalla differenza delle ascisse: $D = |x_0 - k|$.